Oraux X-ENS
Analyse 2 (p308)

EXPRESSION DE $\zeta(2k)$

230, 243, 246, (235)

Soient $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$ et φ la fonction 2π-périodique définie par $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $\varphi(x) = \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right)$.
Du développement en série de FOURIER de φ, déterminer le développement en série entière en 0 de $f : z \longmapsto \frac{z}{e^z - 1}$.
Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ pour z proche de 0 (ce sont les nombres de BERNOULLI).

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(2k) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}.$$

φ est continue par morceaux, on peut calculer ses coefficients de FOURIER : pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\left(\frac{z}{2\pi} - in\right)x} \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{z}{2\pi} - in\right)^{-1} e^{\left(\frac{z}{2\pi} - in\right)x} \right]_{-\pi}^{\pi} \qquad (z \notin 2i\pi\mathbb{Z})$$

$$= (-1)^n \frac{e^{z/2} - e^{-z/2}}{z - 2i\pi n}$$

Comme φ est C^1 par morceaux, d'après le théorème de DIRICHLET, $\sum_{n=-N}^{N} c_n(\varphi) e^{in\pi} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\varphi(\pi^+) + \varphi(\pi^-)}{2}$,
mais $\varphi(\pi^+) = \lim_{x\to\pi^+} \varphi(x) = e^{z/2}$ et $\varphi(\pi^-) = e^{-z/2}$, donc $\sum_{n=-N}^{N} (-1)^n \frac{e^{z/2} - e^{-z/2}}{z - 2in\pi} (-1)^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{2}$,
mais $z \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ donc $e^{z/2} - e^{-z/2} \neq 0$, donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - 2i\pi n} = \frac{1}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{1}{2} \frac{e^z + 1 - 1 + 1}{e^z - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1}$$

Or $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - 2in\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z - 2i\pi n} + \frac{1}{z + 2in\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$, donc :

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = z\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}\right) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Pour $|z| < 2\pi$, on a $\left|\frac{z}{2\pi n}\right| < 1$, donc :

$$\frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{2\pi n}\right)^2} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)^{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{z}{2\pi n}\right)^{2k}$$

Posons $(u_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 1} := \left((-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}\right)_{n\geq 1, k\geq 1}$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{|z|^2}{(2\pi n)^2}\right)^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{|z|^2 - 4\pi n^2} < +\infty$.

D'après le théorème de FUBINI-TONELLI, $(u_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 1}$ est sommable, donc d'après le théorème de FUBINI, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 2\pi$,

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k} = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^k} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) z^{2k}$$

Remarquons que f se prolonge par continuité en 0 et que cette formule reste valable pour $z = 0$. Par unicité du développement en série entière :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(2k) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}.$$

COMMENTAIRE :

- $z = (e^z - 1) f(z)$, i.e. $z = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n\right)$ donc pour $n \geq 2$, $0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$, donc $b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k$. Enfin, $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{2n+1} = 0$.